



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS

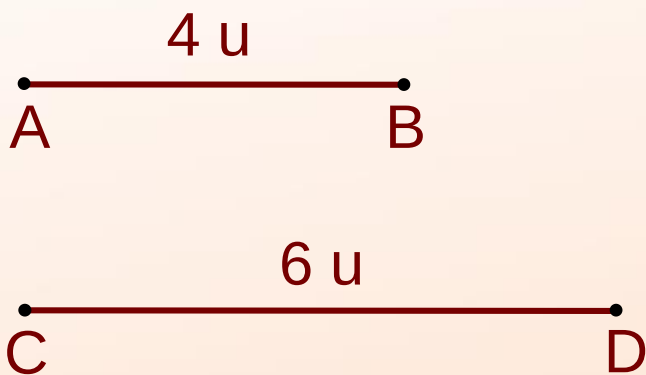
**CICLO
PRE
2024-1**



RAZÓN DE DOS SEGMENTOS

Definición.- Se denomina razón de dos segmentos, al cociente de las longitudes de los segmentos expresados en la misma unidad.

Ejemplo



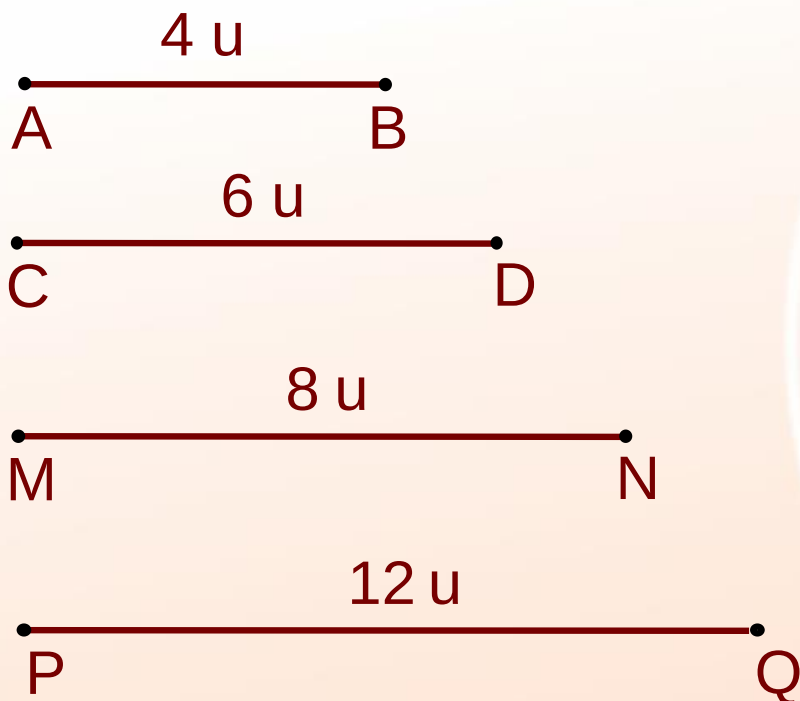
$$\frac{AB}{CD} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

La razón de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es $\frac{2}{3}$

SEGMENTOS PROPORCIONALES

Definición.- Dos segmentos son proporcionales a otros dos, cuando tienen la misma razón.

Ejemplo

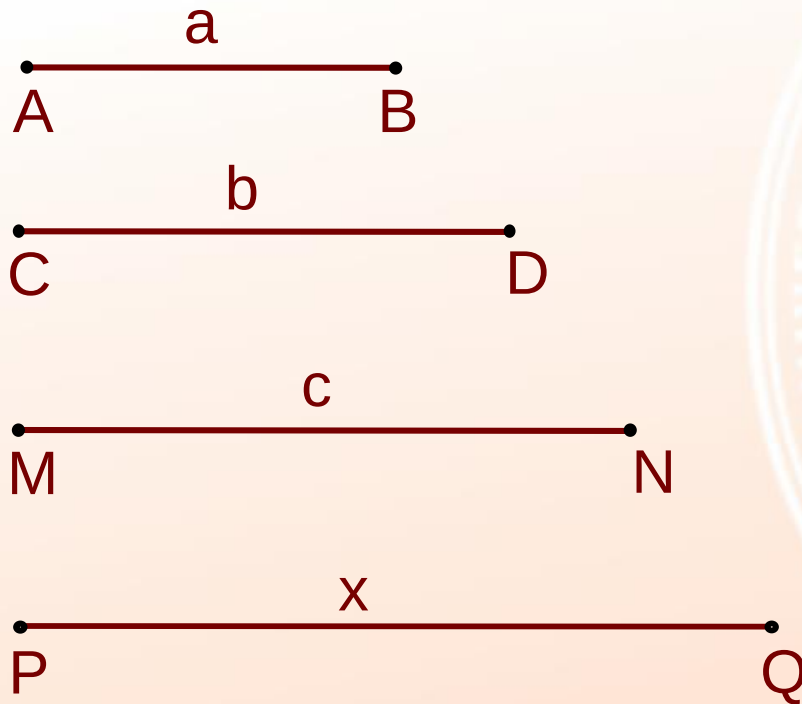


$$\frac{AB}{CD} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad \frac{MN}{PQ} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Si $\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PQ}$, entonces $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$.

CUARTA PROPORCIONAL

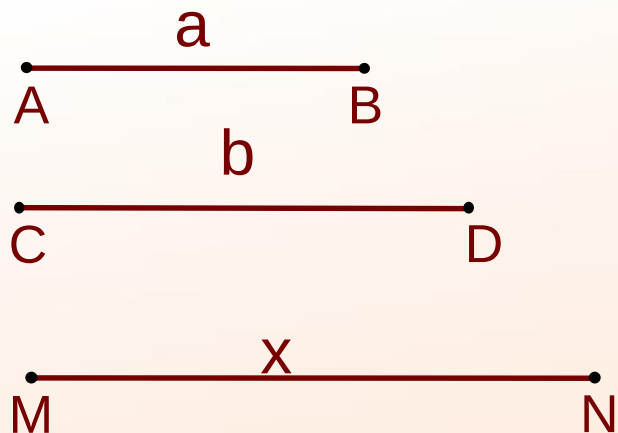
Definición.- Se denomina cuarta proporcional respecto de tres segmentos cuyas longitudes son a , b y c ; al segmento de longitud x que cumple la siguiente condición: $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$



Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, entonces $\overline{PQ}$ es la cuarta proporcional de $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{MN}$

TERCERA PROPORCIONAL

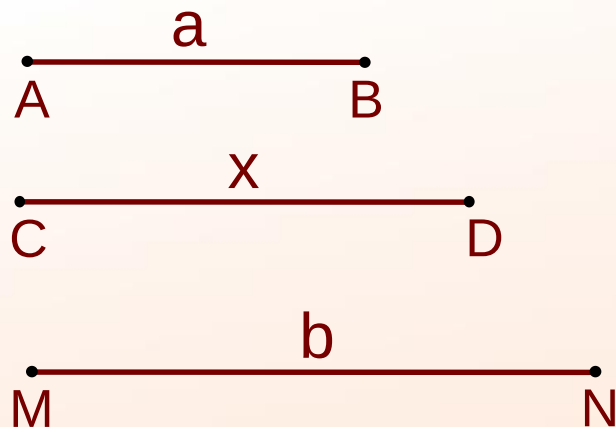
Definición.- Se denomina tercera proporcional respecto de dos segmentos cuyas longitudes son a y b , al segmento de longitud x que cumple la condición: $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$



Si $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$, entonces $\overline{MN}$ es la tercera proporcional de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

MEDIA PROPORCIONAL

Definición.- Se denomina media proporcional respecto de dos segmentos cuyas longitudes son a y b , al segmento de longitud x que cumple la siguiente condición: $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$



Si $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, entonces $\overline{CD}$ es la media proporcional de $\overline{AB}$ y $\overline{MN}$.

EJERCICIO 1

En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D tal que BC es media proporcional de AB y CD. Si $AB + CD = 4 u$, entonces el mayor valor (en u) de BC es

A) $\frac{1}{2}$

D) 3

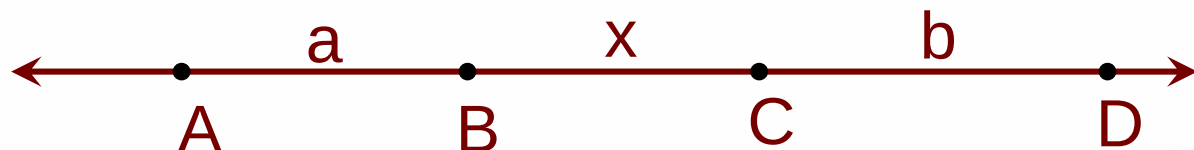
B) $\frac{3}{2}$

E) 4

C) 2

RESOLUCIÓN 1

En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D tal que BC es media proporcional de AB y CD. Si $AB + CD = 4$ u, entonces el mayor valor (en u) de BC es



$$BC = x \quad \text{Dato: } x^2 = a \cdot b \quad \text{y} \quad a + b = 4$$

$$\text{Por medias: } MA \geq MG \rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$$

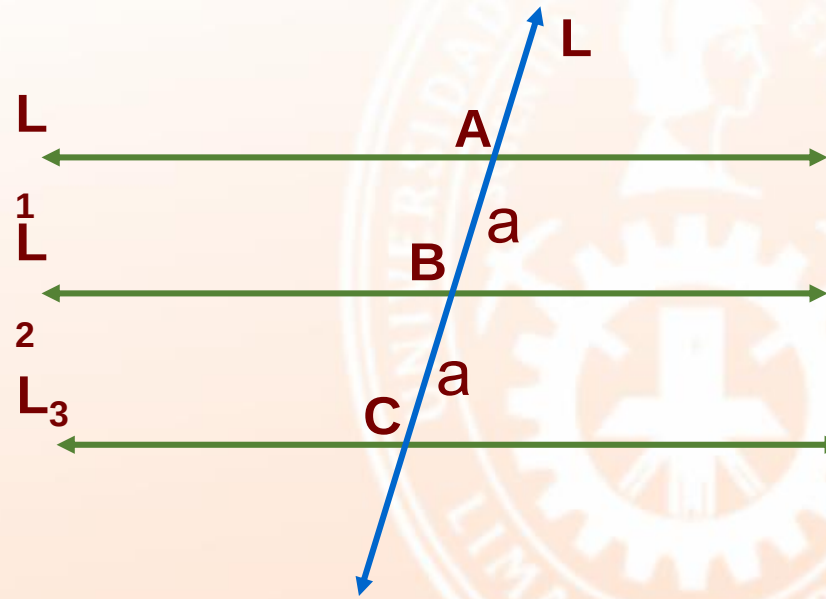
$$\rightarrow \frac{4}{2} \geq \sqrt{x^2}$$

$$x \leq 2 \quad \therefore X_{\text{máximo entero}} = 2$$

Clave: C

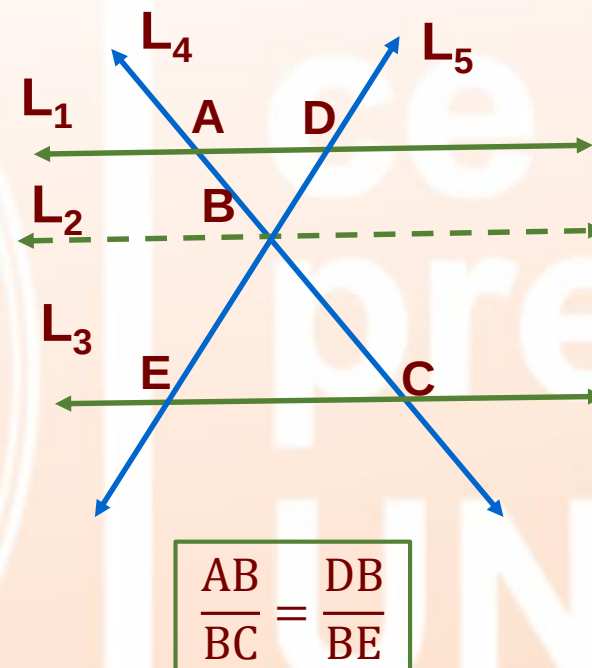
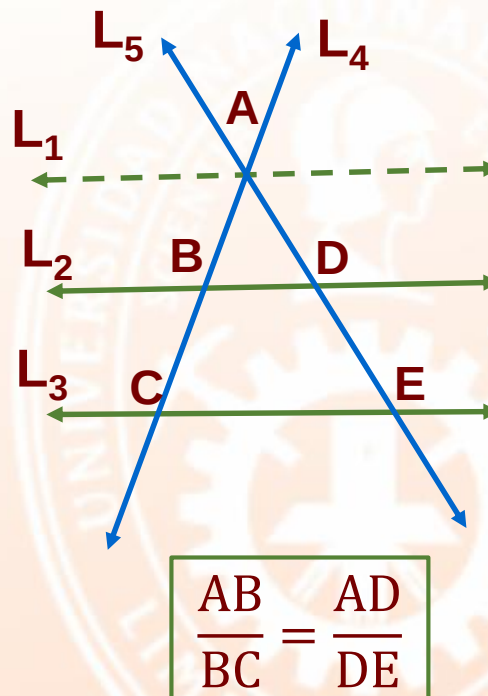
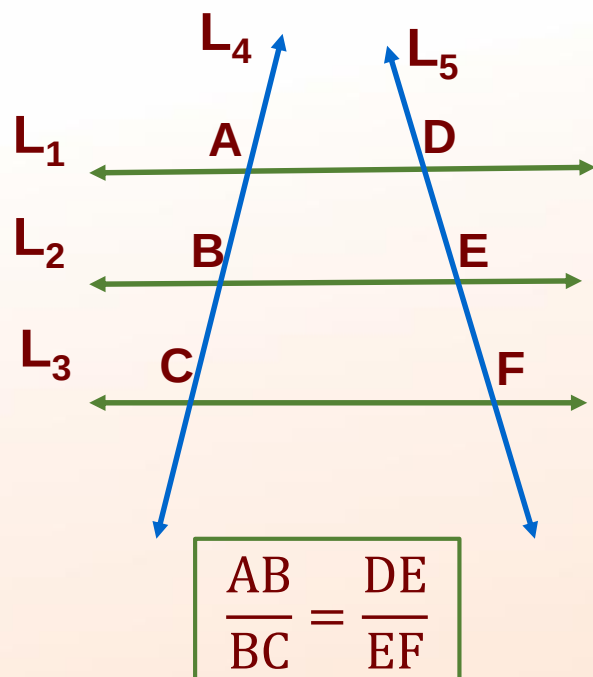
RECTAS EQUIPARALELAS

Las rectas paralelas L_1 , L_2 y L_3 son equiparalelas, si intersecan a otra recta L en los puntos A , B y C respectivamente, tal que $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.



TEOREMA DE THALES

Si tres rectas paralelas L_1 , L_2 y L_3 intersecan a dos rectas L_4 y L_5 , entonces los segmentos determinados en las rectas L_4 y L_5 son proporcionales



EJERCICIO 2

Sea las rectas paralelas L_1 , L_2 , L_3 y L_4 y la rectas secantes S_1 y S_2 tal que S_1 y S_2 determina ordenadamente en L_1 , L_2 , L_3 y L_4 los puntos A , B , C y D y A' , B' , C' y D' tal que $AB = BC = CD$, $\overline{DA'}$ interseca a $\overline{BB'}$ en el punto M y $\overline{DB'}$ interseca a $\overline{CC'}$ en el punto N , calcule $\frac{DM}{MA'} + \frac{B'N}{ND}$

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{2}$

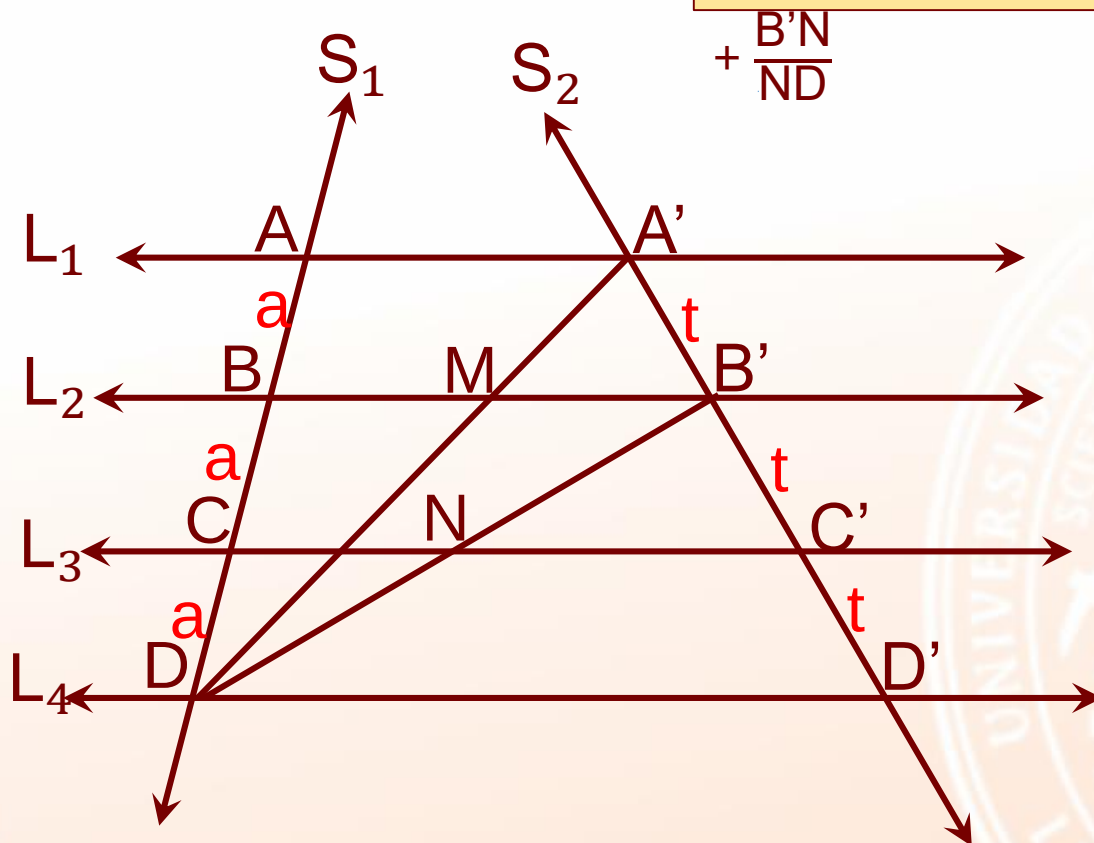
C) 1

D) 2

E) 3

RESOLUCIÓN 2

Sea las rectas paralelas L_1, L_2, L_3 y L_4 y la rectas secantes S_1 y S_2 tal que S_1 y S_2 determina ordenadamente en L_1, L_2, L_3 y L_4 los puntos A, B, C y D y A', B', C' y D' tal que $AB = BC = CD, \overline{DA'}$ interseca a $\overline{BB'}$ en el punto M y $\overline{DB'}$ interseca a $\overline{CC'}$ en el punto N , calcule $\frac{DM}{MA'}$



$$E = \frac{DM}{MA'} + \frac{B'N}{ND}$$

Teorema de equiparalelas:

$$A'B' = B'C' = C'D' = t$$

Teorema de Thales:

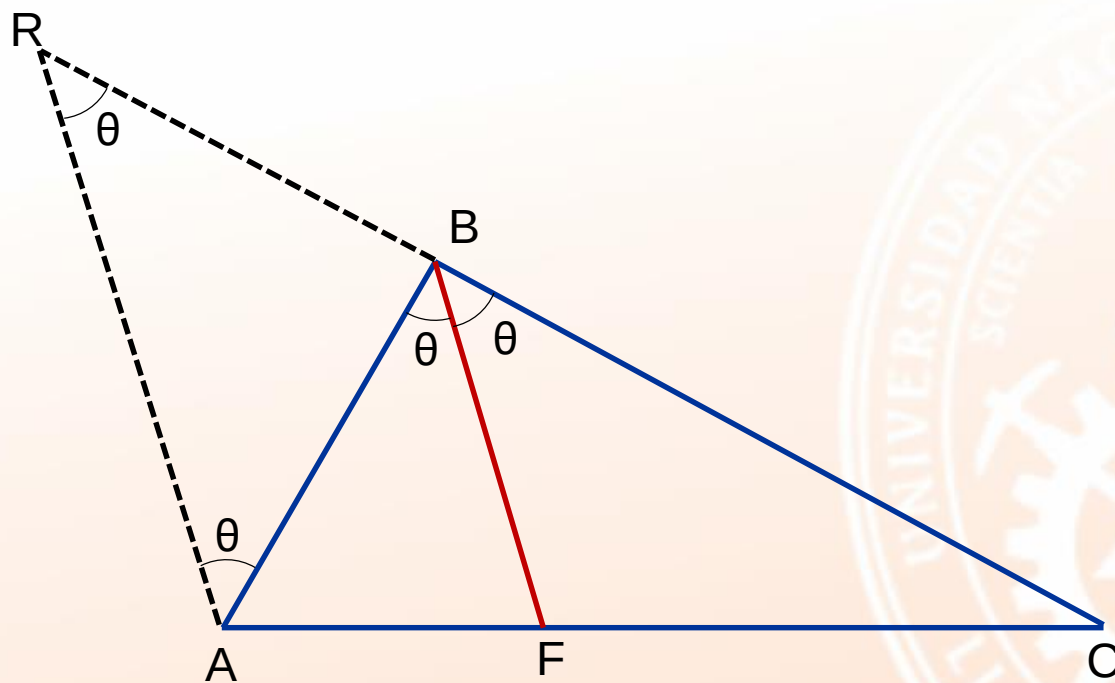
$$E = \frac{2a}{a} + \frac{t}{t}$$

$$E = 3$$

Clave: E

TEOREMA DE LA BISECTRIZ INTERIOR

Si en un triángulo ABC , se traza la bisectriz interior $\overline{BF}$, entonces $\frac{AB}{BC} = \frac{AF}{FC}$.



Demostración

Se traza $\overline{AR} \parallel \overline{BF}$
 $\triangle ARC$, teorema de Thales

$$\frac{AF}{FC} = \frac{RB}{BC}$$

$\triangle ABR$ es isósceles: $RB = AB$

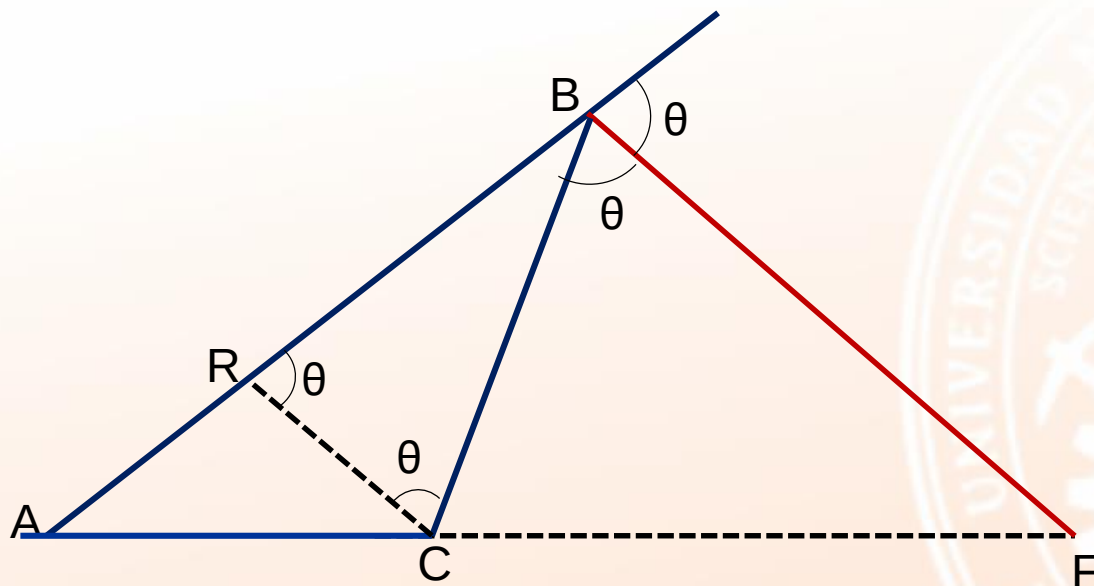
Luego

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AF}{FC}$$

TEOREMA DE LA BISECTRIZ EXTERIOR

Si en un triángulo ABC, se traza la bisectriz exterior $\overline{BF}$, siendo F un punto que pertenece a la prolongación de $\overline{AC}$, entonces $\frac{AB}{BC} = \frac{AF}{FC}$

Demostración



Se traza $\overline{CR} \parallel \overline{BF}$
 $\triangle ABF$, teorema de Thales

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AB}{BR}$$

$\triangle CBR$ es isósceles: $BR = BC$

Luego

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AF}{FC}$$

EJERCICIO 3

En un triángulo ABC , se traza la bisectriz exterior $\overline{BP}$ tal que $C - A - P$. En el triángulo PAB , se traza la bisectriz interior $\overline{PL}$ y la prolongación de $\overline{CL}$ interseca a $\overline{BP}$ en el punto E . Si $BL = 3$ u, $PC = 8$ u y $BC = 7$ u, entonces la longitud (en u) de $\overline{PE}$ es

A) 5

B) 6

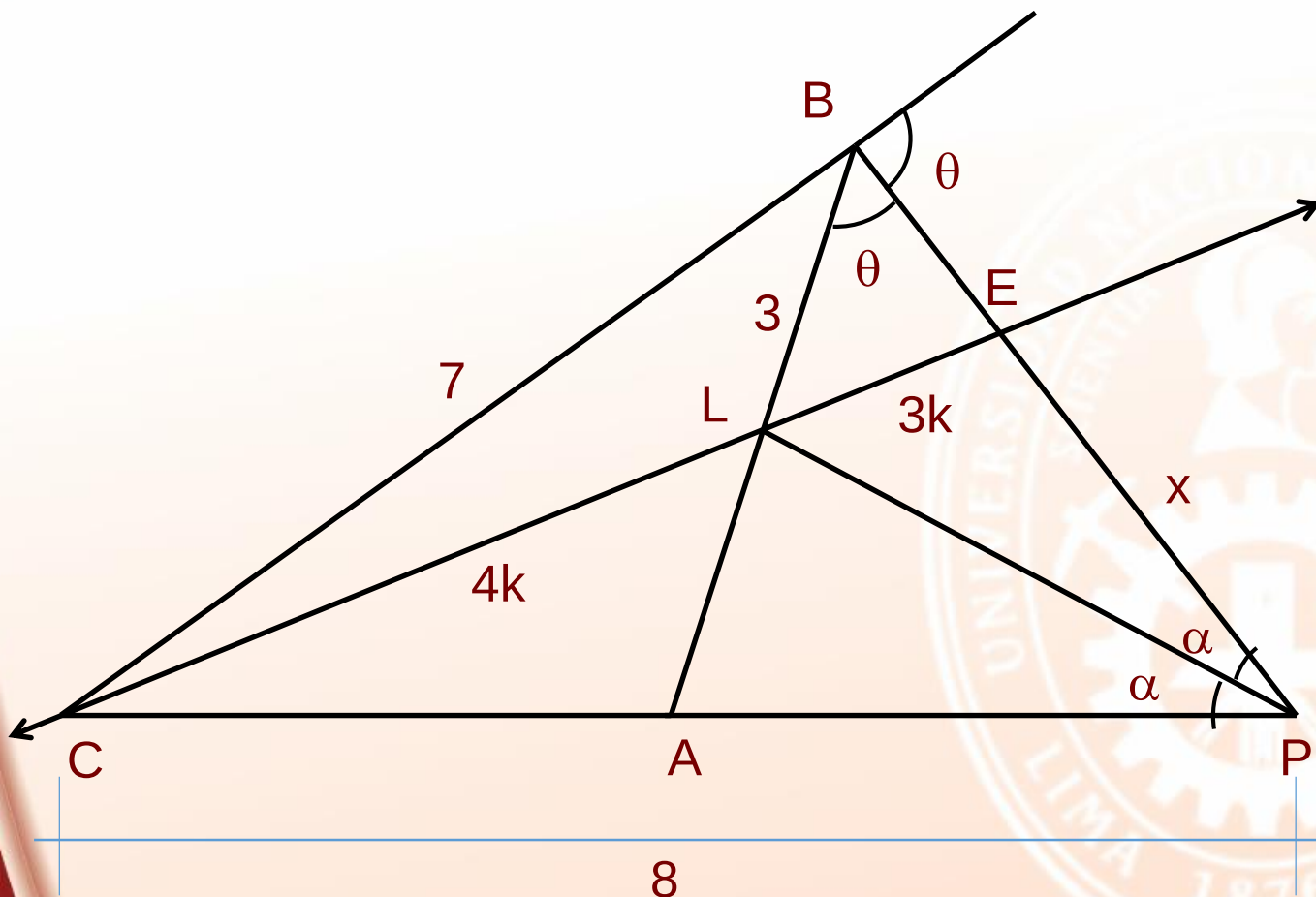
C) 7

D) 8

E) 9

RESOLUCIÓN 3

En un triángulo ABC, se traza la bisectriz exterior $\overline{BP}$ tal que $C - A - P$. En el triángulo PAB, se traza la bisectriz interior $\overline{PL}$ y la prolongación de $\overline{CL}$ interseca a $\overline{BP}$ en el punto E. Si $BL = 3$ u, $PC = 8$ u y $BC = 7$ u, entonces la longitud (en u) de $\overline{PE}$ es



En el $\triangle BCL$: $\overline{BE}$ bisectriz exterior
Entonces por el teorema de la bisectriz exterior:

$$CE = 7k, LE = 3k \Rightarrow CL = 4k$$

En el $\triangle EPC$: $\overline{PL}$ bisectriz interior
Entonces por el teorema de la bisectriz interior:

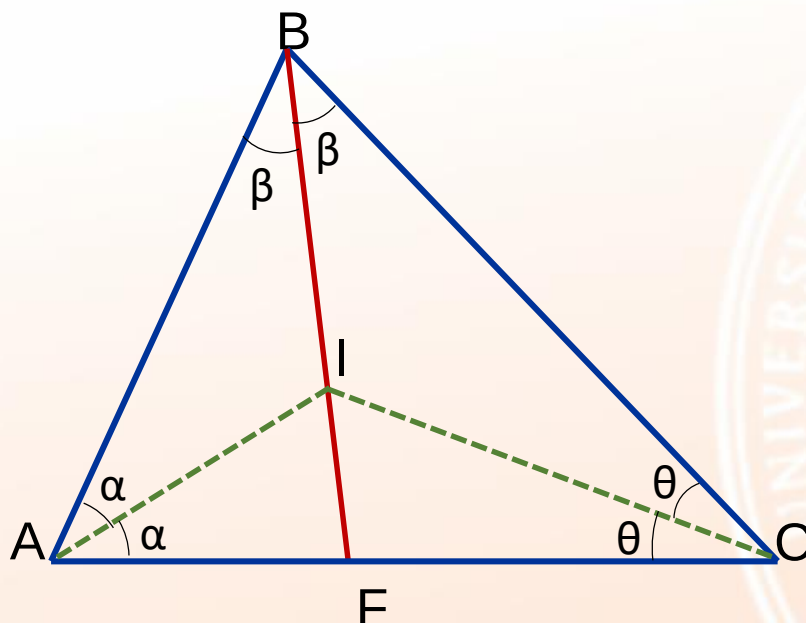
$$\frac{x}{8} = \frac{3k}{4k}$$

$$\Rightarrow x = 6$$

Clave: B

TEOREMA DEL INCENTRO

En un triángulo ABC, I es el incentro y $\overline{BF}$ es una bisectriz interior, entonces $\frac{BI}{IF} = \frac{AB + BC}{AC}$.



Demostración

Teorema de la bisectriz interior

$$\frac{AB}{AF} = \frac{BI}{IF} = \frac{BC}{CF}$$

$$\frac{BI}{IF} = \frac{AB + BC}{AF + CF} = \frac{AB + BC}{AC}$$

EJERCICIO 4

En un triángulo ABC, de incentro I, la prolongación de $\overline{BI}$ interseca al lado $\overline{AC}$ en el punto M, en $\overline{AM}$ se ubica el punto N tal que $\overline{AB} \parallel \overline{NI}$. Si $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm y $AC = 6$ cm, entonces la longitud (en cm) del $\overline{NM}$ es

A) $\frac{5}{2}$

B) $\frac{5}{3}$

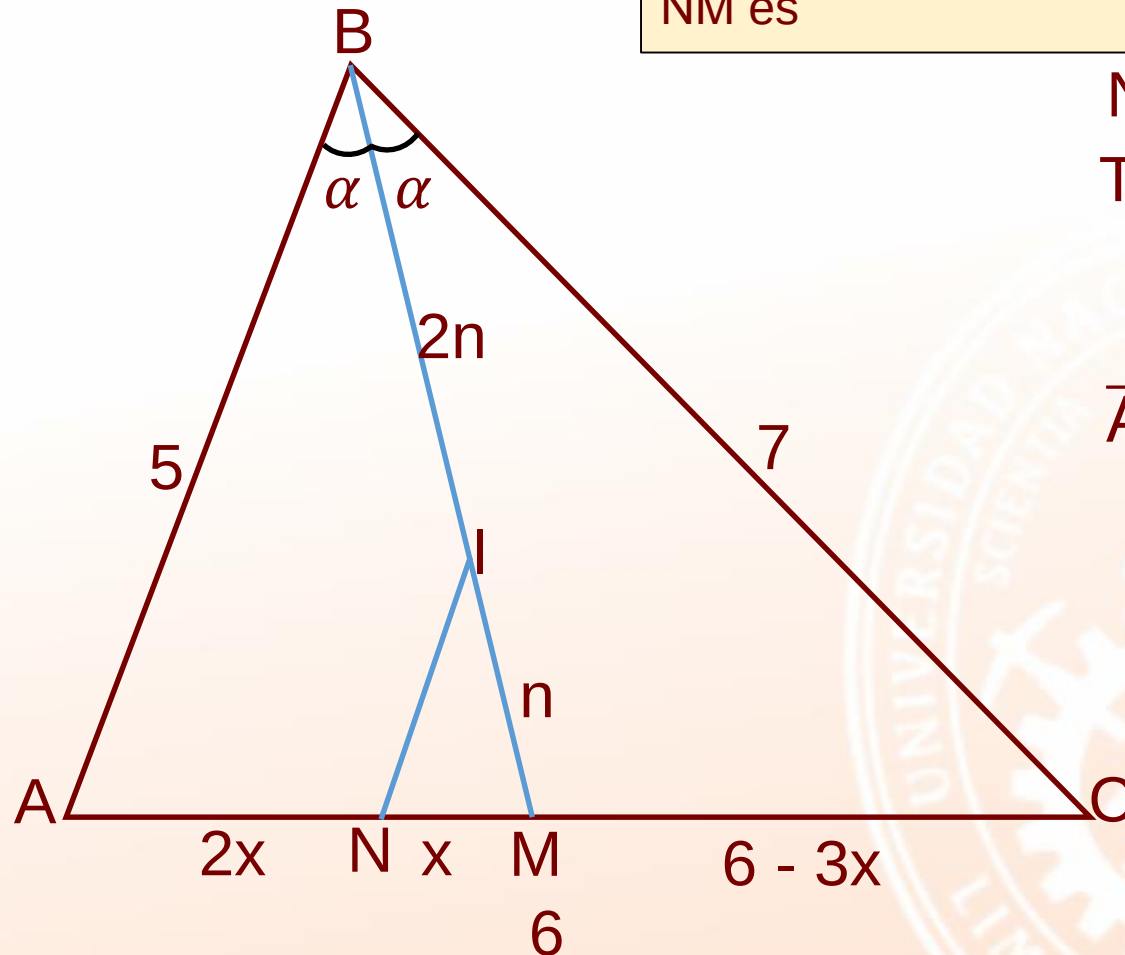
C) $\frac{5}{4}$

D) $\frac{5}{6}$

E) $\frac{5}{7}$

RESOLUCIÓN 4

En un triángulo ABC, de incentro I, la prolongación de $\overline{BI}$ interseca al lado $\overline{AC}$ en el punto M, en $\overline{AM}$ se ubica el punto N tal que $\overline{AB} \parallel \overline{NI}$. Si $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm y $AC = 6$ cm, entonces la longitud (en cm) del $\overline{NM}$ es



$$NM = x$$

Teorema del incentro

$$\frac{BI}{IM} = \frac{5 + 7}{6} = \frac{2}{1}$$

$\overline{AB} \parallel \overline{NI}$, teorema de Thales

$$\frac{AN}{x} = \frac{2n}{n} \Rightarrow AN = 2x$$

Teorema de la bisectriz

$$\frac{5}{7} = \frac{3x}{6 - 3x} \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

Clave: D

TEOREMA DE MENELAO

Si una recta L es secante a un triángulo ABC , de modo que interseca a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y a la prolongación del lado $\overline{AC}$ en los puntos P , Q y R , entonces $\left(\frac{AP}{PB}\right) \left(\frac{BQ}{QC}\right) \left(\frac{CR}{RA}\right) = 1$

Demostración

Se traza $\overline{BT} \parallel \overline{PR}$

Teorema de Thales

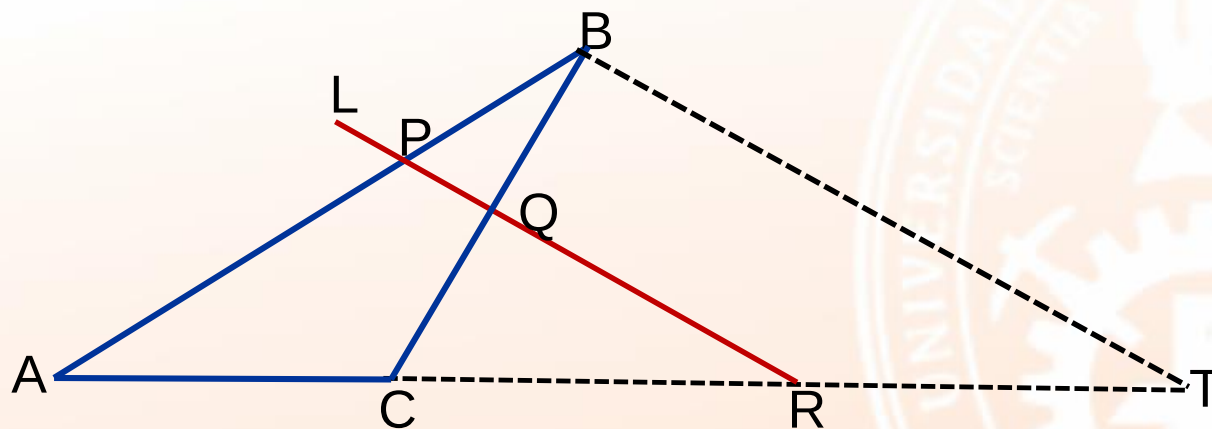
$$\frac{AP}{PB} = \frac{AR}{RT} \text{ y } \frac{BQ}{QC} = \frac{RT}{CR}$$

Luego

$$\left(\frac{AP}{PB}\right) \left(\frac{BQ}{QC}\right) = \frac{AR}{CR}$$

$$\left(\frac{AP}{PB}\right) \left(\frac{BQ}{QC}\right) \left(\frac{CR}{RA}\right) =$$

1



EJERCICIO 5

En un triángulo ABC , la circunferencia inscrita es tangente a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en los puntos E , F y T tal que, las prolongaciones de $\overline{EF}$ y $\overline{AC}$ se intersecan en el punto H . Si $AT = 6$ u y $TC = 4$ u, entonces la longitud (en u) del $\overline{CH}$ es

A) 20

B) 24

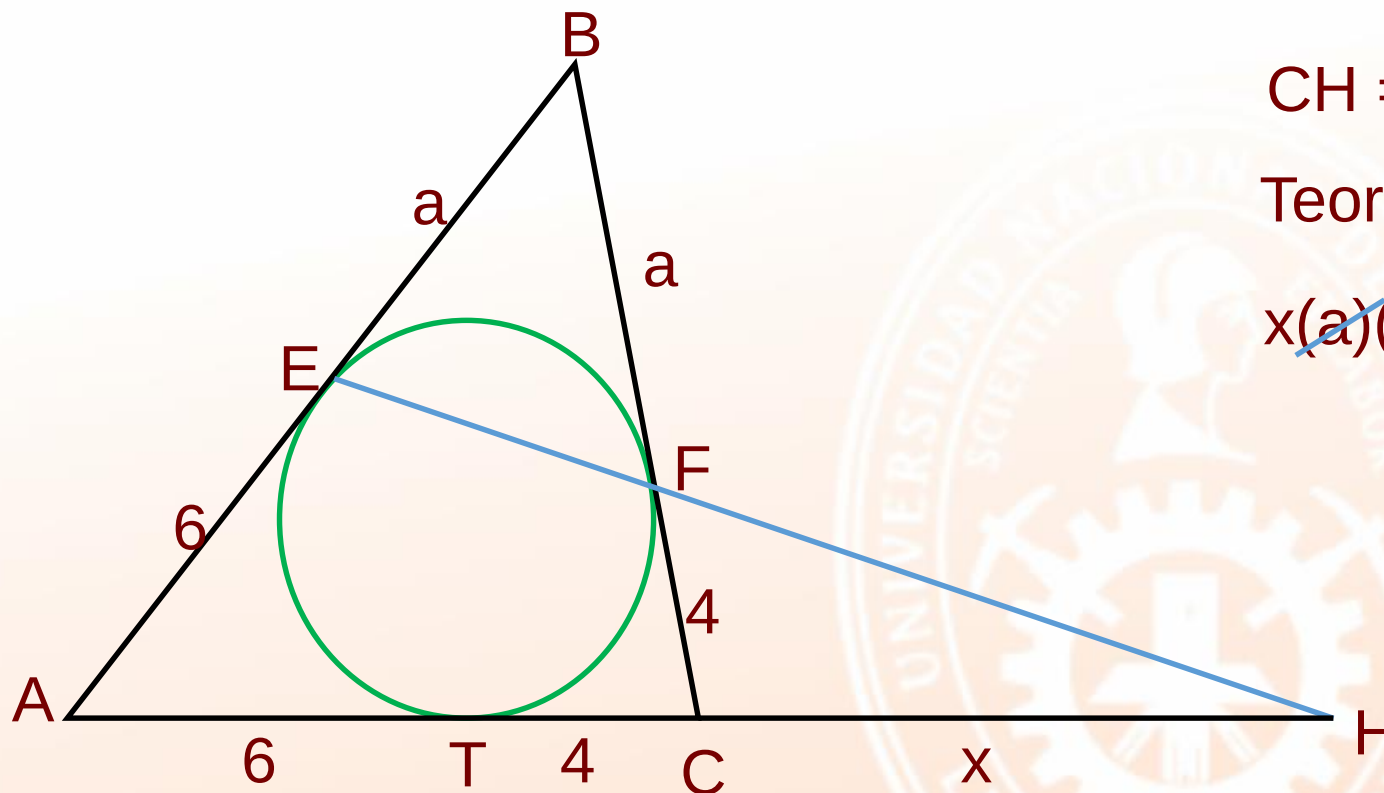
C) 28

D) 30

E) 32

RESOLUCIÓN 5

En un triángulo ABC, la circunferencia inscrita es tangente a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en los puntos E, F y T tal que las prolongaciones de $\overline{EF}$ y $\overline{AC}$ se intersecan en el punto H. Si $AT = 6$ u y $TC = 4$ u, entonces la longitud (en u) del $\overline{CH}$ es



$$CH = x$$

Teorema de Menelao

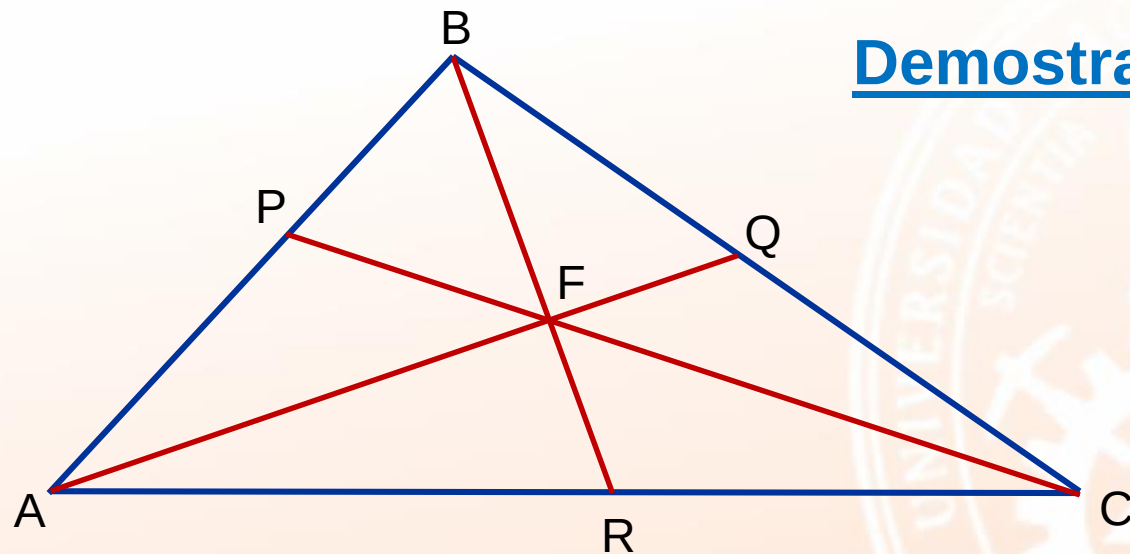
$$x(a)(6) = (10 + x)(4)(a)$$

$$x = 20$$

Clave: A

TEOREMA DE CEVA

Si en un triángulo ABC, se trazan las cevianas concurrentes $\overline{AQ}$, $\overline{BR}$ y $\overline{CP}$, entonces $\left(\frac{AP}{PB}\right) \left(\frac{BQ}{QC}\right) \left(\frac{CR}{RA}\right) = 1$



Demostración

Teorema de Menelao en

$$\Delta ABR: \left(\frac{AP}{PB}\right) \left(\frac{BF}{FR}\right) \left(\frac{RC}{CA}\right) = 1$$

$$\Delta CBR: \left(\frac{BQ}{QC}\right) \left(\frac{CA}{AR}\right) \left(\frac{RF}{FB}\right) = 1$$

Multiplicando

$$\left(\frac{AP}{PB}\right) \left(\frac{BQ}{QC}\right) \left(\frac{CR}{RA}\right) =$$

EJERCICIO 6

En un triángulo ABC , la bisectriz interior $\overline{BD}$ y las cevianas $\overline{AF}$ y $\overline{CE}$ se intersecan en un punto Q . Si $EB = 6$ u, $BF = 4$ u y $FC = 5$ u, entonces la longitud (en u) de $\overline{AE}$ es

A) 20

B) 21

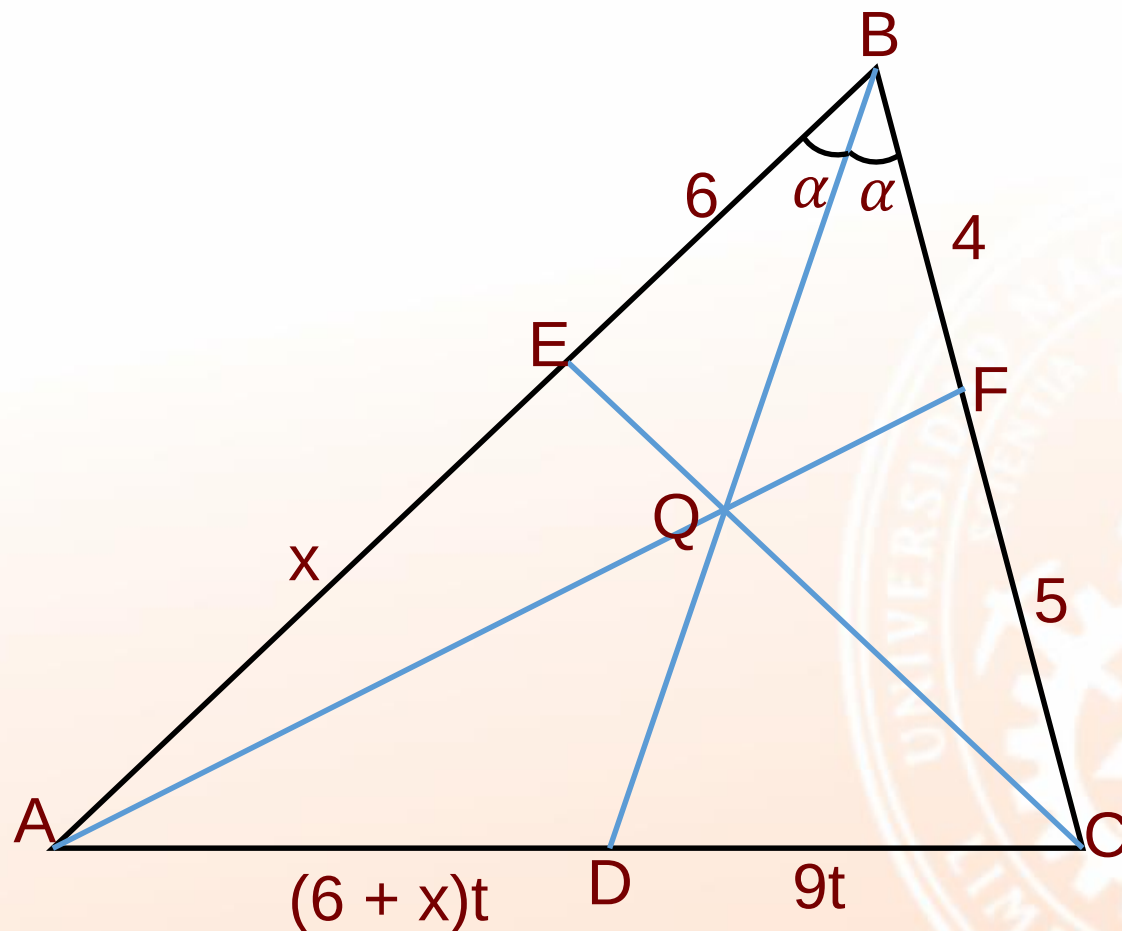
C) 24

D) 27

E) 30

RESOLUCIÓN 6

En un triángulo ABC, la bisectriz interior $\overline{BD}$ y las cevianas $\overline{AF}$ y $\overline{CE}$ se intersecan en un punto Q. Si $EB = 6$ u, $BF = 4$ u y $FC = 5$ u, entonces la longitud (en u) de $\overline{AE}$ es



Calcule $AE = x$

Teorema de la bisectriz

$$AD = (6 + x)t \text{ y } DC = 9t$$

Teorema de ceva

$$(x)(9t)(4) = (6 + x)(t)(5)(6)$$

$$x = 30$$

Clave: E



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

**LA CUATERNA
ARMONICA**

**CICLO
PRE
2024-1**



CUATERNA ARMÓNICA

Los puntos colineales y consecutivos A, B, C y D formarán una cuaterna armónica, si se cumple la proporción: $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$

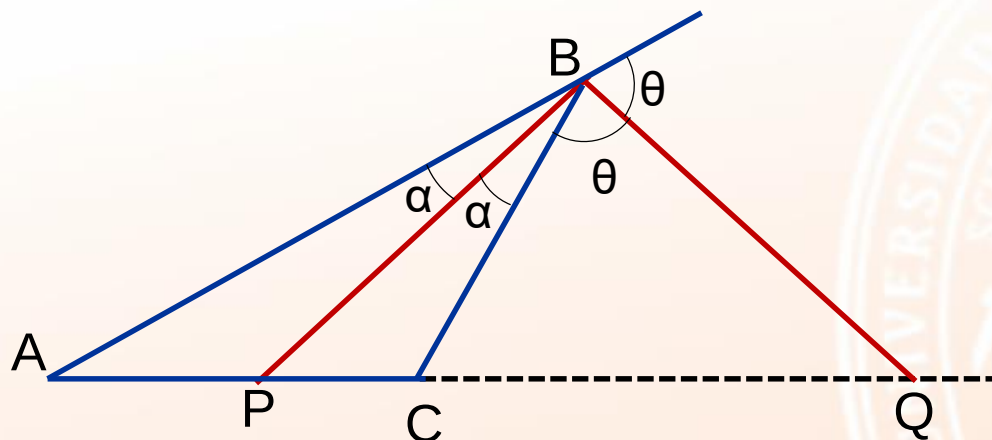


- $AD > CD \rightarrow AB > BC$
- $AD > AB \rightarrow CD > BC$

TEOREMA

Si en un triángulo ABC ($AB > BC$), se trazan las bisectrices interior y exterior $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$, entonces los puntos A, P, C y Q forman una cuaterna armónica.

Demostración



T. de la bisectriz interior $\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PC}$

T. de la bisectriz exterior $\frac{AB}{BC} = \frac{AQ}{CQ}$

Luego: $\frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{CQ}$

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{CQ}$$

EJERCICIO 7

En una circunferencia O está inscrita el cuadrado $ABCD$, en el arco AB se ubica el punto P , las cuerdas PD y PC intersecan a la cuerda AB en los puntos Q y R respectivamente, si $AQ = a$ y $QR = b$. Halle RB .

A) $b\left(\frac{a+b}{a-b}\right)$

B) $b\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$

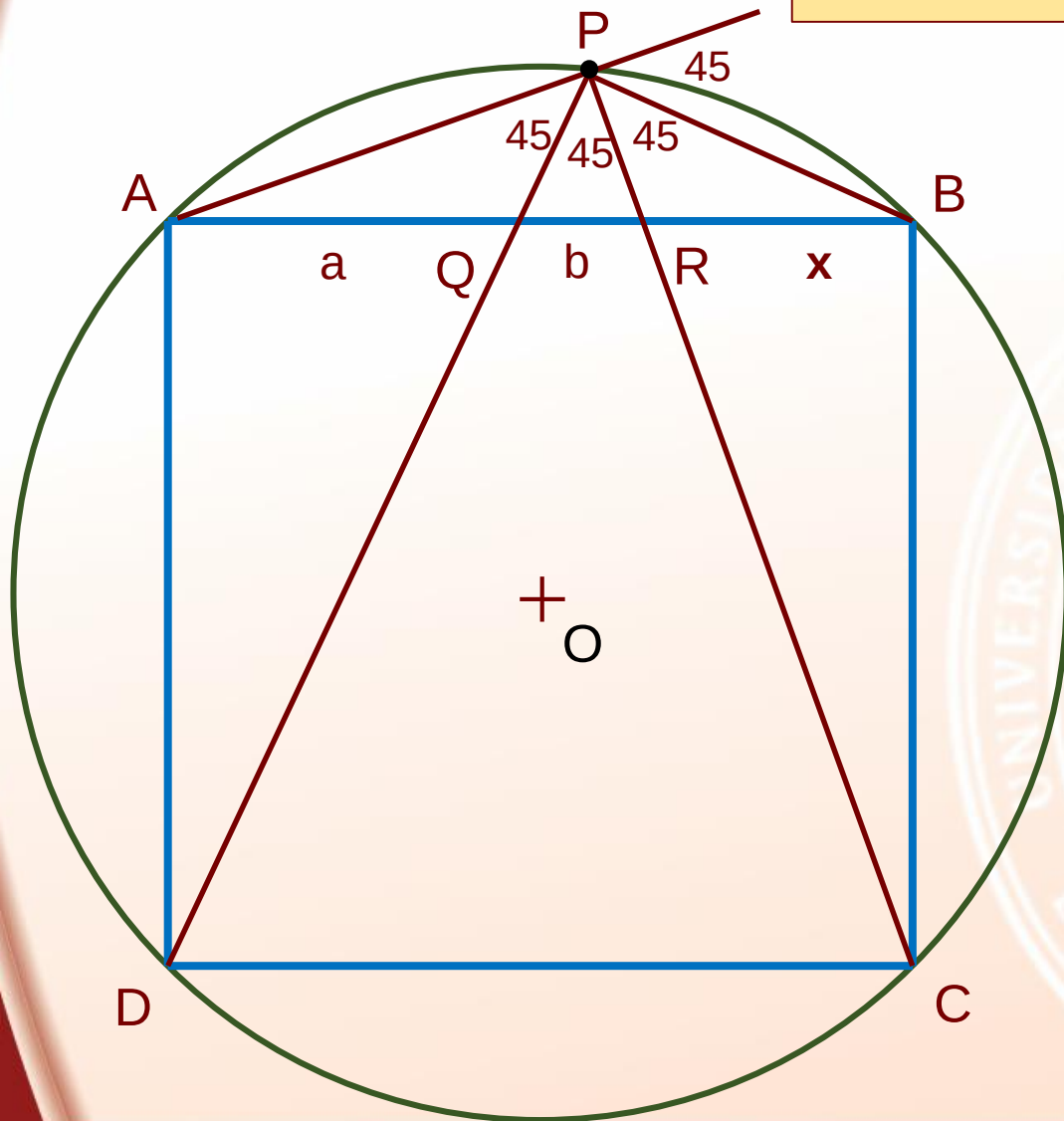
C) $\frac{ab}{a+b}$

D) $a\left(\frac{2a+b}{a-b}\right)$

E) $b\left(\frac{2a-b}{a+b}\right)$

RESOLUCIÓN 7

En una circunferencia O está inscrita el cuadrado $ABCD$, en el arco AB se ubica el punto P , las cuerdas PD y PC intersecan a la cuerda AB en los puntos Q y R respectivamente, si $AQ = a$ y $QR = b$. Calcule RB .



$\triangle APR$, $\overline{PQ}$ es bisectriz interior

$\triangle APR$, $\overline{PB}$ es bisectriz exterior:

A , Q , R y B , forman una cuaterna armónica:

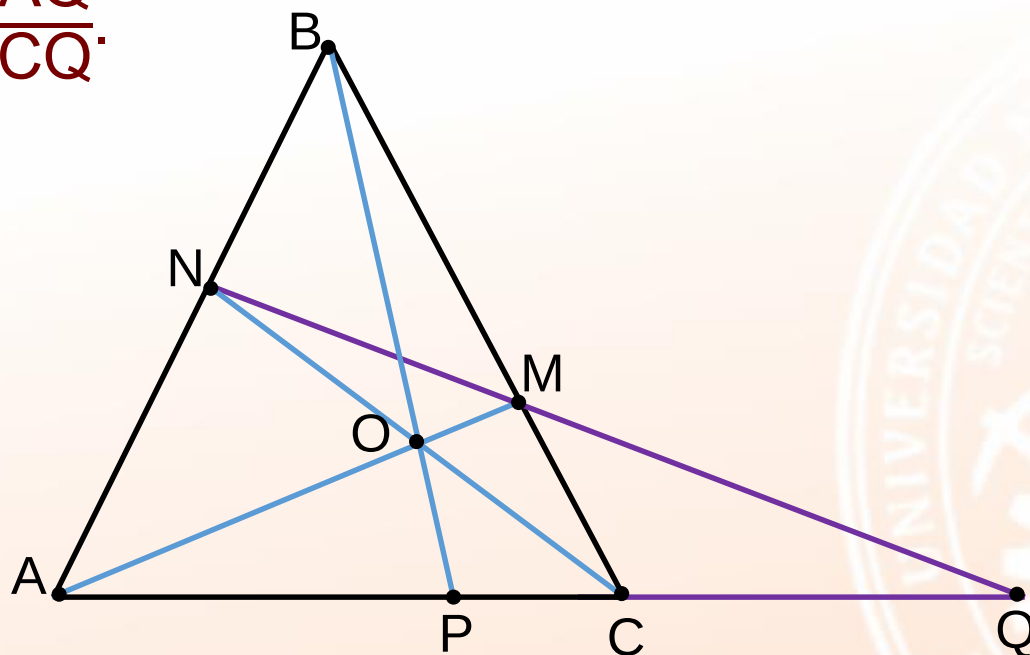
$$\frac{a}{b} = \frac{a + b + x}{x}$$

Efectuando: $x = b\left(\frac{a + b}{a - b}\right)$

Clave: A

TEOREMA

Si en un triángulo ABC , se trazan las cevianas $\overline{AM}$, $\overline{BP}$ y $\overline{CN}$ concurrentes en O , las prolongaciones de $\overline{NM}$ y $\overline{AC}$ se intersecan en Q , entonces $\frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{CQ}$.



Demostración

T. de Menelao $\left(\frac{AN}{NB}\right) \left(\frac{BM}{MC}\right) \left(\frac{CQ}{AQ}\right) = 1$

T. de Ceva $\left(\frac{AN}{NB}\right) \left(\frac{BM}{MC}\right) \left(\frac{CP}{AP}\right) = 1$

Luego: $\frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{CQ}$



ce
pre
UNI

Geometría

GRACIAS

ce
pre
UNI